Lösung 31.3.07.01 „Spaziergänger (ohne Corona…)“ (12 BE)

a) Fahrzeit des Zuges: $t = \frac{s}{v} = \frac{7{,}4\,\text{km}}{65\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}113846\,\text{h} = 6{,}83077\,\text{min} = 409{,}8\,\text{s}$

Tinas gesamte „Wanderstrecke“: $s = (130\,\text{m} - 12\,\text{m}) \cdot 2 = 236\,\text{m}$

Geschwindigkeit von Tina $v = \frac{s}{t} = \frac{236\,\text{m}}{409{,}8\,\text{s}} = 0{,}575891\frac{\text{m}}{\text{s}} = 2{,}07321\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Tim „Wanderstrecke“: $s = 130\,\text{m} \cdot 2 = 260\,\text{m}$

Geschwindigkeit von Tim $v = \frac{s}{t} = \frac{260\,\text{m}}{409{,}8\,\text{s}} = 0{,}634456\frac{\text{m}}{\text{s}} = 2{,}2404\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Gesamtgeschwindigkeit: $v_{ges} = v_{Tina} + v_{Tim} = 1{,}21035\frac{\text{m}}{\text{s}} = 4{,}35725\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Gesamtstrecke bis zum Treffpunkt: $s_{ges} = 130\,\text{m}$

Zeit bis zum Treffpunkt: $t_{Tina} = t_{Tim} = \frac{s_{ges}}{v_{ges}} = \frac{130\,\text{m}}{1{,}21035\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 107{,}407\,\text{s}$

Position des Treffpunktes: $s_{Tina} = v_{Tina} \cdot t_{Tina} = 0{,}575891\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 107{,}407\,\text{s} = 61{,}8548\,\text{m}$

Sie treffen sich zum ersten Mal 61,9 m vom vorderen Ende des Zuges entfernt. 6 BE

b) Die Position des zweiten Treffpunktes sei x (gemessen von vorn). Dann hat Tim eine Strecke von $130\,\text{m} + x$ zurückgelegt und Tina von $118\,\text{m} + (118\,\text{m} - x)$. Zusammen haben sie also

$130\,\text{m} + x + 236 - x = 366\,\text{m}$

Zeit bis zum Treffpunkt: $t_{Tina} = t_{Tim} = \frac{s_{ges}}{v_{ges}} = \frac{366\,\text{m}}{1{,}21035\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 302{,}393\,\text{s}$

Tina läuft bis zum Treffpunkt: $s_{Tina} = v_{Tina} \cdot t_{Tina} = 0{,}575891\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 302{,}393\,\text{s} = 174{,}145\,\text{m}$

$$x = 236\,\text{m} - 174{,}145\,\text{m} = 61{,}8548\,\text{m}$$

Sie treffen sich zum zweiten Mal 61,9 m vom vorderen Ende des Zuges entfernt (und damit an der gleichen Position im Zug wie beim ersten Mal. Das hätte man bestimmt auch durch Überlegung heraus bekommen können …). 4 BE

c) Fahrzeit des Zuges bis zum ersten Treffpunkt: $107{,}407\,\text{s}$

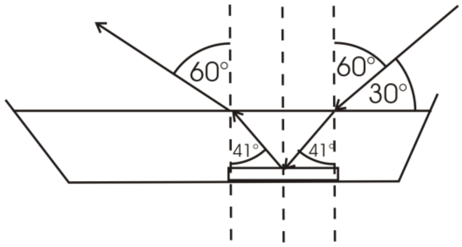
Fahrstrecke: $s_{Zug} = v_{Zug} \cdot t_{Zug} = 65\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 107{,}407\,\text{s} = 18{,}0556\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 107{,}407\,\text{s} = 1939{,}3\,\text{m}$ 1 BE

Fahrzeit des Zuges bis zum zweiten Treffpunkt: $302{,}393\,\text{s}$

Fahrstrecke: $s_{Zug} = v_{Zug} \cdot t_{Zug} = 65\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 302{,}393\,\text{s} = 18{,}0556\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 302{,}393\,\text{s} = 5459{,}87\,\text{m}$ 1 BE

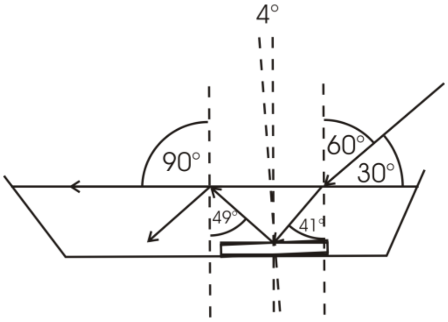
Lösung 31.3.07.02 „Spieglein, Spieglein…in der Wanne“ (8 BE)

a) $\alpha_1 = 60°$!, Einfallslot! ✓
$\beta_1 = 41°$ (Wert aus dem Diagramm, +/- 1°) ✓
Spiegelung ✓
Brechung zum Austritt mit 60°
In der sauberen Zeichnung wird Symmetrie erwartet! ✓



4 BE

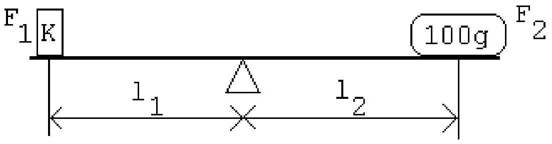
b) Erkennen, dass bei $\alpha_2 = 49°$ Totalreflexion auftritt.✓
Zeichnung Skizze zur veränderten Lage des Spiegels
(Drehung des Spiegels um den linken Auflagepunkt)✓
Überlegung:
Beim Drehen des Spiegels um $\alpha°$ dreht sich der reflektierte Strahl um $2 \cdot \alpha°$ ✓
$(49° - 41°)/2 = 4°$ ✓
Der Spiegel muss um 4° gedreht werden.



4 BE

Lösung 31.3.07.03 „Ausgewogen“ (10 BE)

a) Verwendung des Lineals als Hebel mit dem Prisma als Auflage(Dreh-)punkt. ✓
Körper und Wägestück so lange verschieben, bis Gleichgewicht eintritt. ✓
Skizze:



✓✓

Messen der Längen l_1 und l_2 gemäß Skizze. ✓
Die Längen sind vom Schwerpunkt bis zum Drehpunkt zu messen! ✓ 6 BE

b) Bestimmen der Gewichtskraft des Wägestücks ✓ mit $F = m \cdot g$
Zur Berechnung Hebelgesetz anwenden ✓
Es ergibt sich $F_1 = \frac{F_2 \cdot l_2}{l_1}$ ✓
Berechnung von $m_{Körper}$ aus F_1: $m_{Körper} = \frac{F_1}{g}$ ✓
Hinweis: Lösung über einfache Verhältnisgleichung (Massen, Längen) ebenfalls möglich; dann Deutung notwendig. 4 BE

Lösung 31.3.07.04 „Urlaub auf Sylt“ (10 BE)

a) Zwischen den Teilchen eines Stoffes wirken Kohäsionskräfte. (✓) Im Innern eines Sandkornes sind diese zwar sehr viel größer als bei Wassermolekülen, zwischen den Sand**körnern** sind die Kohäsionskräfte jedoch sehr klein (✓). Ferner verhindert die Oberflächenspannung bei Wasser (✓), dass einzelne Tröpfchen leicht die Flüssigkeit verlassen können. Resultat: ein leichtes Sandkorn kann von Wind leichter getrennt werden als Wassertröpfchen von einer Wasseroberfläche. (✓) 4 BE

b) Kapillarität. Begriff erklären (✓✓)
Kapillarität ist die Folge der Oberflächenspannung. (✓) Ist die Temperatur höher, dann bewegen sich die Teilchen schneller (✓) und die Oberflächenspannung ist kleiner (✓). Deshalb wird warmes Wasser nicht so weit nach oben steigen wie kaltes Wasser. (✓) 6 BE

Lösung 31.3.08.1 „Eintauchtiefe und Tragfähigkeit“ (10 BE)

a) Geg.: m = 200g A = 30cm² h = 10cm $\left(\rho = 1{,}5\frac{g}{cm^3}\right)$

Ges.: h_x in cm; V_{Sand} in cm³

Lösung:

Das vom schwimmenden Becher verdrängte Wasser hat das Volumen:

$$V = \frac{m}{\rho_{Wasser}} = \frac{200g}{1\frac{g}{cm^3}} = 200cm^3 ✓✓✓$$

Volumen des Zylinders $V = A \cdot h_x$ ✓ $\longrightarrow$ $h_x = \frac{V}{A} = \frac{200cm^3}{30cm^2} = 6{,}7cm$ ✓✓

Der Becher sinkt 6,7cm tief ein.

b) Maximal kann der Becher das Volumen V_{max} verdrängen.

$$V_{max} = A \cdot h = 30cm^2 \cdot 10cm = 300cm^3 ✓$$

Dieses verdrängte Wasser hat eine Masse $m_{max} = \rho_{Wasser} \cdot V_{max} = 1\frac{g}{cm^3} \cdot 300cm^3 = 300g$ ✓

Es können also noch 300g - 200g = 100g Sand eingefüllt werden. $V_{Sand} = \frac{100g}{1{,}5\frac{g}{cm^3}} = 67cm^3$ ✓ ✓

In den Becher können noch 67 cm³ Sand eingefüllt werden, bevor er sinkt.

Lösung 31.3.08.2 „Federspannung“ (10 BE)

a) Die Kraft auf die erste Feder F_1 setzt sich zusammen aus der Gewichtskraft der zweiten Feder F_{G2} und der Gewichtskraft des angehängten Körpers F_{GK}:

$F_1 = F_{G2} + F_{GK} = 0{,}20\ N + 1\ N = 1{,}2\ N$ ✓ $\rightarrow$ $\Delta l_1 = \frac{F_1}{D_1} = \frac{1{,}2N \cdot cm}{0{,}15N} = 8cm$ ✓

$l_1 = l_{01} + \Delta l_1 = 20\ cm + 8\ cm = 28\ cm$ ✓

Die zweite Feder wird lediglich durch die Gewichtskraft des angehängten Körpers gedehnt:

$\Delta l_2 = \frac{F_{GK}}{D_2} = \frac{1N \cdot cm}{0{,}08N} = 12{,}5cm$ $\rightarrow$ $l_2 = l_{02} + \Delta l_2 = 35\ cm + 12{,}5\ cm = 47{,}5\ cm$ ✓

Gesamtlänge $l = l_1 + l_2 = 28\ cm + 47{,}5\ cm =$ <u>75,5 cm</u> ✓ 5 BE

b) Bei vertauschten Federn gilt dann:

$F_2 = F_{G1} + F_{GK} = 0{,}25\ N + 1\ N = 1{,}25\ N$ $\rightarrow$ $\Delta l_2 = \frac{F_2}{D_2} = \frac{1{,}25N \cdot cm}{0{,}08N} = 15{,}6cm$ ✓

$l_2 = l_{02} + \Delta l_2 = 35\ cm + 15{,}6\ cm = 50{,}6\ cm$ ✓

$\Delta l_1 = \frac{F_{GK}}{D_1} = \frac{1N \cdot cm}{0{,}15N} = 6{,}7cm$ ✓ $\rightarrow$ $l_1 = l_{01} + \Delta l_1 = 20\ cm + 6{,}7\ cm = 26{,}7\ cm$ ✓

Gesamtlänge $l = l_1 + l_2 = 26{,}7\ cm + 50{,}6\ cm =$ <u>77,3 cm</u> ✓ 5 BE

Lösung 31.3.08.3 „Metallwürfel“ (10 BE)

a) Die vom Kupferkörper abgegebene Wärme ist gleich der vom Wasser aufgenommenen Wärme:

$$Q_{ab} = Q_{auf} \quad ✓$$

$$c_{Metall} \cdot m_{Metall} \cdot (\vartheta_{Metall} - \vartheta_M) = c_W \cdot m_W \cdot (\vartheta_M - \vartheta_w) \quad ✓✓$$

$$c_{Metall} = \frac{c_w \cdot m_w \cdot (\vartheta_M - \vartheta_W)}{m_{Metall} \cdot (\vartheta_{Metall} - \vartheta_M)} \quad ✓$$

$$c_{Metall} = \frac{4{,}186\ \text{kJ} \cdot 0{,}5\text{kg} \cdot 3\text{K}}{\text{kg} \cdot \text{K} \cdot 0{,}2\text{kg} \cdot 82\text{K}} \quad ✓$$

$$c_{Metall} = 0{,}383\ \frac{\text{kJ} \cdot \text{kg}}{\text{K}} \quad ✓$$

6 BE

b) Es könnte Kupfer ($c_{Cu} = 0{,}39 \frac{\text{kJ} \cdot \text{kg}}{\text{K}}$) oder Zink ($c_{Zn} = 0{,}39 \frac{\text{kJ} \cdot \text{kg}}{\text{K}}$) sein. ✓ 1BE

c) Dichtebestimmung, da Kupfer und Zink unterschiedliche Dichten haben. ✓
Volumenbestimmung des Würfels (Kantenlänge messen und berechnen) ✓ 3 BE
Mit Hilfe der bekannten Masse die Dichte berechnen ✓

Lösung 31.3.08.4 „Autofahrt“ (10 BE)

a)

$$v_1 = \frac{\Delta s_1}{t_1}$$

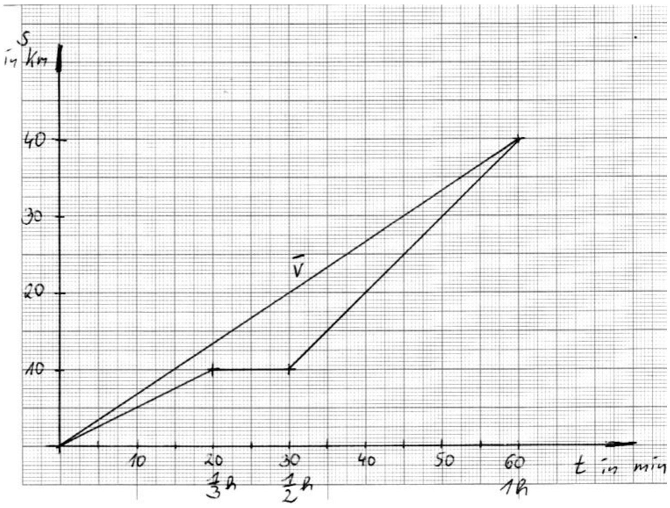
$$\Delta s_1 = v_1 \cdot t_1 = 30\frac{km}{h} \cdot \frac{1}{3} h = 10 km \ ✓$$

$$t_2 = 1\text{h} - \frac{1}{3}\text{h} - 10\,\text{min}$$
$$= 60\,\text{min} - 20\,\text{min} - 10\,\text{min} \ ✓$$
$$= 30\,\text{min} = \frac{1}{2}\text{h}$$

$$v_2 = \frac{\Delta s_2}{t_2}$$

$$\Delta s_2 = v_2 \cdot t_2 = 60\frac{km}{h} \cdot \frac{1}{2} h = 30 km$$

$$\bar{v} = \frac{s_{ges}}{t_{ges}} = \frac{30km + 10km}{1h} = 40\frac{km}{h} \ ✓$$



✓✓✓✓ 7 BE

b) Die Reibungskraft F_R muss größer sein als die Hangabtriebskraft F_H.

$$m = 1{,}4\text{t} = 1400\text{kg} \Rightarrow F_G = 14000\,N \ ✓$$

$$\frac{l}{h} = \frac{F_H}{F_G} \qquad \frac{l}{h} \cdot F_G = F_H \ ✓ \qquad F_H = \frac{15}{100} \cdot 14000 N = 2100 N = 2{,}1 kN \ ✓$$

Die Reibungskraft muss größer sein als 2,1kN damit der PKW stehen bleibt. 3 BE

Lösung 31.3.09.1 „Lampen“ (10 BE)

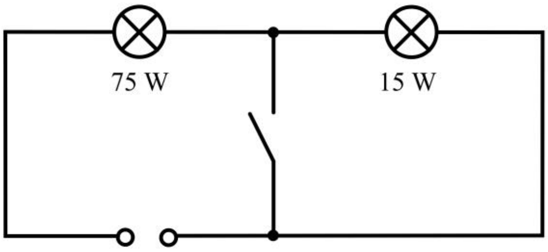
a) $P = \frac{U^2}{R}$ $R = \frac{U^2}{P}$ $R_{25} = 77{,}44\Omega$ $R_{40} = 48{,}4\Omega$ $\rightarrow$ $R_{ges} = 4\,R_{25} + R_{40} = 358{,}16\Omega$ ✓✓

$\frac{U_{25}}{220V} = \frac{R_{25}}{R_{ges}}$ $\rightarrow$ $U_{25} = 47{,}6V$

$\frac{U_{40}}{220V} = \frac{R_{40}}{R_{ges}}$ $\rightarrow$ $U_{40} = 29{,}7V$ ✓

An den Lampen mit 25W liegt eine Spannung über der Betriebsspannung an. Also leuchten diese heller. Die 40W Lampe erhält nicht ihre Betriebsspannung und leuchtet somit nicht sehr hell.
Eventuell gehen die 25W Lampen kaputt und somit leuchtet keine Lampe. ✓✓ 5 BE

b) Begründung:
Geöffneter Schalter: Aufteilung der Spannung im Verhältnis 1:5, d.h. die Spannung an der 75W Lampe ist zu gering, um diese zum Leuchten zu bringen; die 15W Lampe leuchtet. ✓✓
Geschlossener Schalter: die 15 W Lampe ist überbrückt, d.h. (fast) die gesamte Spannung liegt an der 75W Lampe an und diese leuchtet auf. ✓



✓✓ 5 BE

Lösung 31.3.09.2 „Trafo“ (10 BE)

$\rho_E = 7860\ kg/m^3$ $\rho_K = 8960\ kg/m^3$, $\Delta T = 40K$ ✓
90% des Behältervolumens bei 60°C abzüglich Eisen- und Kupfervolumen bei 60°C ergibt max. Ölvolumen bei 60°C

✓ ✓ ✓

$0{,}9 \cdot (l_o(1 + \alpha_{St} \cdot \Delta T))^3 - m_E/\rho_E(1 + (3\alpha_E) \cdot \Delta T) - m_K/\rho_K(1 + (3\alpha_K) \cdot \Delta T)$
$= 0{,}46152m^3 - 0{,}12741m^3 - 0{,}11182 = 0{,}22229m^3$ ✓

Daraus folgt das Ölvolumen bei 20°C: $0{,}22229m^3 = V_{20°C} \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta T)$ ✓
$V_{20°C} = 0{,}21407m^3$ ✓

Dazu Eisen- und Kupfervolumen bei 20°C gibt Gesamtvolumen bei 20°C
$V_{20°C} + m_E/\rho_E + m_K/\rho_K = 0{,}21407m^3 + 0{,}12723m^3 + 0{,}11161m^3 = 0{,}45291m^3$ ✓✓

Dies geteilt durch die Grundfläche $(0{,}800m)^2$ liefert das Ergebnis 70,77cm. ✓ 10 BE

Lösung 31.3.09.3 „Kalte Getränke“ (10 BE)

Für die Aufgaben a) b) c) kann der solve-Befehl des CAS genutzt werden, der Lösungsweg und Einheiten müssen dabei klar erkennbar sein.

a) $\Delta T = 20K$ $m_1 \cdot c \cdot \Delta T = m_2 \cdot q_S$ $\rightarrow m_2 = 50g$ $\rightarrow$ Es bleiben 80g – 50g = 30g Eis übrig. ✓✓✓ 3 BE

b) $m_1 \cdot c \cdot (\theta_1 - \theta_m) = m_2 \cdot q_S + m_2 \cdot c \cdot (\theta_m - \theta_2)$ $\rightarrow$ $\theta_m = \frac{m_1 \cdot c \cdot \theta_1 + m_2 \cdot c \cdot \theta_2 - m_2 \cdot q_S}{m_1 \cdot c + m_2 \cdot c}$

$\theta_m = 8{,}9°C$ ✓✓✓✓ 4 BE

c) $\theta_m = 15°C$ $\rightarrow$ $m_1 \cdot c \cdot 5\ K = m_2 \cdot q_S + m_2 \cdot c \cdot 15\ K$ $\rightarrow$ $m_2 = 10{,}5g$ ✓✓✓ 3 BE

Lösung 31.3.09.4 „Digitalkamera“ (10 BE)

Bestimmen der Bildweite b: $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$ mit g = 12 m ist b = 0,0502 m ✓✓✓✓

Bestimmen der Fahrstrecke G des Radfahrers: $\frac{G}{B} = \frac{g}{b}$ mit B = 0,12 mm ist G = 0,02868 m ✓✓✓

Berechnen der Geschwindigkeit v: $v = \frac{G}{t} = 7{,}17\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 25{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ✓✓✓

10 BE

Lösung 31.3.10.1 „SchwEiswürfel“ (12 BE)

a) Schwimmen: $F_A > F_G \checkmark$

$$F_A = \varrho_{\text{Wasser}} \cdot (V_{\text{Eis}} + V_{\text{Gewicht}}) \cdot g \checkmark = \varrho_{\text{Wasser}} \cdot \left(V_{Eis} + \frac{m_{\text{Gewicht}}}{\varrho_{\text{Alu}}} \checkmark\right) \cdot g$$

$$= 1\,\frac{g}{cm^3} \cdot \left((10\,cm)^3 + \frac{50\,g}{2{,}7\,\frac{g}{cm^3}}\right) \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} = 9{,}992\,N \checkmark$$

$$F_G = m \cdot g = (V_{\text{Eis}} \cdot \varrho_{\text{Eis}} + m_{\text{Gewicht}}) \cdot g \checkmark = \left((10\,cm)^3 \cdot 0{,}92\,\frac{g}{cm^3} + 50\,g\right) \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} = 9{,}51\,N \checkmark$$

6 BE

b) Sinken: $F_A < F_G$

Berechnung der Eismasse, bei der die Anordnung schwebt:

$$\varrho_{\text{Wasser}} \cdot \left(\frac{m_{\text{Eis}}}{\varrho_{\text{Eis}}} + \frac{m_{\text{Gewicht}}}{\varrho_{\text{Alu}}}\right) \cdot g = (m_{\text{Eis}} + m_{\text{Gewicht}}) \cdot g \checkmark$$

$$m_{\text{Eis}} \cdot \frac{\varrho_{\text{Wasser}}}{\varrho_{\text{Eis}}} + \frac{\varrho_{\text{Wasser}} \cdot m_{\text{Gewicht}}}{\varrho_{\text{Alu}}} = m_{\text{Eis}} + m_{\text{Gewicht}}$$

$$m_{\text{Eis}} = \frac{m_{\text{Gewicht}} - \frac{\varrho_{\text{Wasser}} \cdot m_{\text{Gewicht}}}{\varrho_{\text{Alu}}}}{\frac{\varrho_{\text{Wasser}}}{\varrho_{\text{Eis}}} - 1} \checkmark = \frac{50\,\text{g} - \frac{1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 50\,g}{2{,}7\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}}{\frac{1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}{0{,}92\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} - 1} = 362\,\text{g} \checkmark$$

Bei einer Eismasse von 362 g schwebt die Anordnung gerade noch so im Wasser. Unterhalb davon beginnt sie zu sinken.

$$Q = q_{\text{s,Eis}} \cdot \Delta m_{\text{Eis}} = 334\,\frac{\text{J}}{\text{g}} \cdot \left(0{,}92\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot (10\,\text{cm})^3 - 362\,\text{g}\right) \checkmark = 186\,\text{kJ} \checkmark$$

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{186\,\text{kJ}}{45\,\frac{\text{kJ}}{\text{min}}} = 4{,}1\,\text{min} \checkmark$$

6 BE

Lösung 31.3.10.2 „Robin Wood“ (8 BE)

a) $E_{H,oben} + E_{kin} = E_{H,0} + E_{Sp} \checkmark$

$$m \cdot g \cdot h_{oben} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h_0 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 \checkmark$$

$$v = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot h_0 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 - m \cdot g \cdot h_{oben}}{\frac{1}{2} \cdot m}} = \sqrt{\frac{0{,}01\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot (1{,}7\,m - 5\,m) + \frac{1}{2} \cdot 120\,\frac{N}{m} \cdot (0{,}7\,m)^2}{\frac{1}{2} \cdot 0{,}01\,kg}} = 76{,}2\,\frac{m}{s} \checkmark\checkmark\checkmark$$

5 BE

b) $F_A = F_{Sp}$

$$a = \frac{D \cdot s}{m} = \frac{120\,\frac{N}{m} \cdot 0{,}7\,m}{0{,}01 kg} = 8400\,\frac{m}{s^2}$$

Zu Beginn erfährt das Gewicht eine Beschleunigung von ca. $8400\,\frac{m}{s^2}$ $\checkmark$

Aufgrund des Hooke’schen Gesetzes nimmt die Beschleunigung bis zum Verlassen der Schleuder immer weiter ab. $\checkmark$

Mit steigender Geschwindigkeit nimmt die Luftreibung immer weiter zu, weshalb das Steinchen gebremst wird. Permanent wirkt eine konstante Fallbeschleunigung, die das Teilchen abbremst. $\checkmark$

3 BE

Lösung 31.3.10.3 „Triohm“ (10 BE)

Es gilt: $P = U \cdot I = \frac{U^2}{R_{ges}}$ ✓ und $R_2 = k \cdot R_1$ sowie $R_3 = k \cdot R_2 = k^2 \cdot R_1$ ✓ 2 BE

Die Minimalleistung wird erreicht, wenn R_{ges} maximal ist. Das ist bei Reihenschaltung der Fall.
Die Maximalleistung wird erreicht, wenn R_{ges} minimal ist. Das ist bei Parallelschaltung der Fall. ✓ 1 BE

Es gilt: (1) $P_{min} = \frac{U^2}{R_1+R_2+R_3}$ bzw.: $0{,}980W = \frac{(9{,}8V)^2}{R_1+k\cdot R_1+k^2\cdot R_1} \leftrightarrow \underline{R_1 = \frac{(9{,}8V)^2}{0{,}980W\cdot(1+k+k^2)}}$ ✓ 1 BE

und: (2) $P_{max} = \frac{U^2}{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{k\cdot R_1}+\frac{1}{k^2\cdot R_1}\right)^{-1}}$ ✓

bzw.: $12{,}005\ W = \frac{(9{,}8V)^2}{\left(\frac{1}{R_1}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}\right)\right)^{-1}} \leftrightarrow R_1 = \frac{(9{,}8V)^2\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}\right)}{12{,}005W}$ ✓ 2 BE

$$R_1 = \frac{(9{,}8V)^2\cdot\left(\frac{k^2+k+1}{k^2}\right)}{12{,}005W} \leftrightarrow \underline{R_1 = \frac{(9{,}8V)^2\cdot(k^2+k+1)}{12{,}005W\cdot k^2}}$$ ✓

(1) = (2) liefert: $\frac{(9{,}8V)^2}{0{,}980W\cdot(1+k+k^2)} = \frac{(9{,}8V)^2\cdot(k^2+k+1)}{12{,}005W\cdot k^2}$

$\leftrightarrow 12{,}005W\cdot k^2 = 0{,}980W\cdot(k^2+k+1)^2 \quad |:0{,}980W$

$\leftrightarrow \frac{49}{4}\cdot k^2 = (k^2+k+1)^2 \quad |\sqrt{\ }$ 2 BE

da k > 0 ist, gilt: $\rightarrow \frac{7}{2}\cdot k = k^2+k+1$

$\leftrightarrow \quad 0 = k^2 - \frac{5}{2}k + 1$ ✓

$\leftrightarrow \quad k_{1/2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}-1} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}$

$\leftrightarrow \quad k_1 = 2\ und\ k_2 = 0{,}5$ ✓ 2 BE

<u>Fall 1:</u> $k_1 = 2$ in (1): $R_1 = \frac{(9{,}8V)^2}{0{,}980W\cdot(1+2+2^2)} = 14\Omega$ und $R_2 = 28\Omega$ sowie $R_3 = 56\Omega$

<u>Fall 2:</u> $k_2 = 0{,}5$ in (1): $R_1 = \frac{(9{,}8V)^2}{0{,}980W\cdot(1+0{,}5+0{,}25^2)} = 56\Omega$ und $R_2 = 28\Omega$ sowie $R_3 = 14\Omega$ ✓

Man erhält in beiden Fällen die gleichen, gesuchten Widerstandswerte: <u>14Ω, 28Ω und 56Ω</u>.

Lösung 31.3.10.4 „Kennerblick“ (10 BE)

Mit der Abbildungsgleichung und dem Abbildungsmaßstab gilt für dünne Sammellinsen:

1. Bildprojektion: 2. Bildprojektion:

I $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ und II $\frac{1}{f} = \frac{1}{g'} + \frac{1}{b'}$

III $\frac{b}{g} = \frac{B}{G} = \frac{6cm}{12cm} = \frac{1}{2}$ ✓ und IV $\frac{b'}{g'} = \frac{B'}{G'} = \frac{7{,}5cm}{12cm} = \frac{5}{8}$ ✓ 2 BE

III → I $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{\frac{1}{2}g}$ und IV → II $\frac{1}{f} = \frac{1}{g'} + \frac{1}{\frac{5}{8}g'}$

III′ $g = 3f$ ✓ und IV′ $g' = \frac{13}{5}f$ ✓ 2 BE

Für die Wohnzimmerlänge L gilt inklusive Berücksichtigung der Smartphonedicke von 1 cm:

V $L = b + g + 1cm$ ✓ $= b' + g' + 1cm + 27{,}5cm$ ✓

mit III und IV $L = \frac{1}{2}g + g + 1cm = \frac{5}{8}g' + g' + 1cm + 27{,}5cm$ ✓ 4 BE

mit III′und IV′ $L = 4{,}5f + 1cm = 4{,}225f + 1cm + 27{,}5cm$

$0{,}275f = 0{,}275m$ ✓

Brennweite des Brillenglases: $f = 1{,}00m$

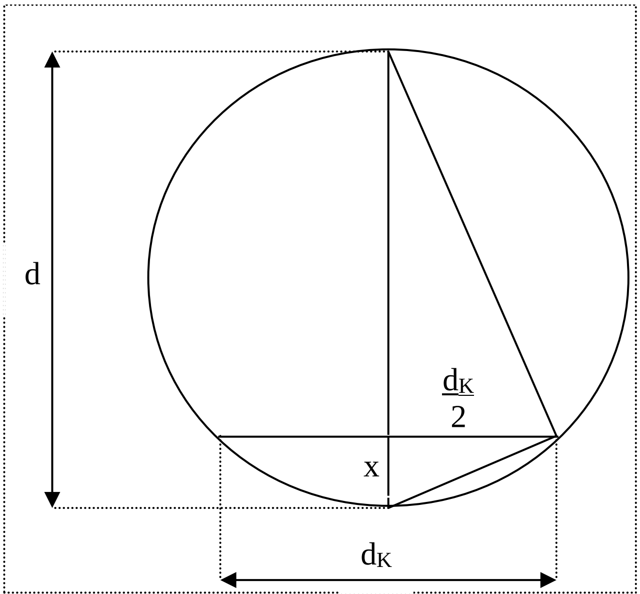
Für den Brechwert erhält man: $D = \frac{1}{f} = \mathbf{1\ dpt}$ ✓ 2 BE

Die Länge des Wohnzimmers beträgt: $L = 4{,}5f + 1cm = \mathbf{4{,}51m}$ ✓

Lösung 31.3.11.1 „Ballistische Knete“ (10 BE)

a) $\frac{1}{2}k\cdot\Delta s^2=\frac{1}{2}m\cdot v^2 \to v=27{,}8\,\frac{m}{s}$ 2 BE

b)



Skizze.
Lösungsansatz = Höhensatz:

$$(d-x)\cdot x=(d_k/2)^2$$ 2 BE

Eintauchtiefe x berechnen (Bremsweg):

$$0=x^2-d\cdot x+\frac{d_K^2}{4}$$

$$x_1=2{,}5mm$$

$$x_2=19{,}5mm\ (entfällt)$$ 2 BE

Der Bremsweg beträgt rund 2,5 mm.

c) $v=\sqrt{2\cdot a\cdot x_1}\to a\approx 154000\,\frac{m}{s^2}$ 2 BE

d) $F=m\cdot a\approx 6{,}2kN$ 1 BE

e) $t_B=\frac{\Delta v}{a}=1{,}8\cdot10^{-4}s=0{,}18ms$ 1 BE

Lösung 31.3.11.2 „Kabeltrommel-Opa“ (10 BE)

(1) $\Delta Q_{Cu}=W_{el}$ mit $W_{el}=U_{Draht}\cdot I\cdot t$ und $I=\frac{P_{Gerät}}{U_{Netz}}=\frac{P}{U}=4{,}783A$ 3 BE

(2) $m\cdot c_{Cu}\cdot\Delta T=U_D\cdot\frac{P}{U}\cdot t$ mit $\begin{cases} m=\rho\cdot V=\rho\cdot A_{ges}\cdot l=\rho\cdot 2A_D\cdot l \\ U_D=\rho_{el}\cdot\frac{2\cdot l}{A_D}\cdot I \end{cases}$ 3 BE

(3) Einsetzen in (1): 1 BE

$$(\rho\cdot 2A_D\cdot l)\cdot c_{Cu}\cdot\Delta T=\left(\rho_{el}\cdot\frac{2\cdot l}{A_D}\cdot I\right)\cdot\frac{P}{U}\cdot t$$

und Lösen nach ΔT:

$$\Delta T=\frac{\rho_{\mathrm{el}}\cdot l\cdot I\cdot\frac{P}{U}\cdot t}{\rho\cdot A_{\mathrm{D}}^2\cdot l\cdot c_{\mathrm{Cu}}}\quad\text{und}\quad I=\frac{P}{U}\ \to\ \Delta T=\frac{\rho_{\mathrm{el}}\cdot P^2\cdot t}{\rho\cdot A_{\mathrm{D}}^2\cdot U^2\cdot c_{\mathrm{Cu}}}$$ 2 BE

$$\Delta T\approx 120K$$

Die Endtemperatur beträgt $\vartheta=32°C+120K=152°C\approx\underline{\underline{150°C}}$ 1 BE

➔ **Beachten Sie die Alternativlösung auf der nächsten Seite!**

Lösung 31.3.11.2 *Alternativlösung:* „Kabeltrommel-Opa“ (10 BE)

(1) $\Delta Q_{Cu} = W_{el}$ mit $W_{el} = U_{Draht} \cdot I \cdot t$ und $I = \frac{P_{Gerät}}{U_{Netz}} = \frac{P}{U} = 4{,}783A$ 3 BE

(2) $R_D = \rho_{el} \cdot \frac{2l}{A_D} = 2{,}27\,\Omega$ und $R_G = \frac{U^2}{P} = 48{,}1\,\Omega$

$\frac{U}{R_G} = \frac{U_D}{R_D} \rightarrow U_D = 10{,}85\,V$ 2 BE

(3)

$Q = P \cdot t = \frac{U_D^2}{R_D} \cdot t = 3116\,J$ 2 BE

$\Delta T = \frac{Q}{m_D \cdot c_{Cu}} = \frac{Q}{\rho_{Cu} \cdot l \cdot A_D \cdot c_{Cu}} = 120{,}3\,K \approx 120\,K \rightarrow \underline{\underline{\upsilon \approx 152°C}}$ 3 BE

Lösung 31.3.11.3 „Entscheidungstiefe“ (10 BE)

Erklärung: Mit zunehmender Wassertiefe h (von Wasserspiegel zu Wasserspiegel) wird die eingeschlossene Luft durch den zunehmenden Schweredruck des Wassers stärker zusammengedrückt, so dass sich das Volumen der eingeschlossenen Luft in Abhängigkeit von der Tiefe $V_L(h)$ verringert. Dadurch dringt Wasser von unten in den Zylinder ein und die mittlere Dichte $\overline{\rho}$ (aus Glas und eingedrungenem Wasser) steigt, bis sie gleich der Dichte des verdrängten Wassers ρ_W ist.
Weiterdrücken: In größerer Tiefe ist $\overline{\rho} > \rho_W$ und der Zylinder sinkt weiter (der Druck p ist in der eingeschlossenen Luft überall gleich).

2 BE

Druck = Luftdruck + Schweredruck $p(h) = p_0 + \rho_W g h$
und wegen T = konst. folgt aus $\frac{p \cdot V}{T}$ = konst. $p \cdot V$ = konst.
d.h. $p_0 \cdot V_0 = p(h) \cdot V_L(h)$ und mit $V_0 = 100$ ml $= 0{,}0001$ m³ $= V_i$
$V_L(h) = \frac{p_0 \cdot V_i}{p(h)} = \frac{p_0 \cdot V_i}{p_0 + \rho_W \cdot g \cdot h}$

2 BE

Ansatz Schweben: $\rho_W = \overline{\rho}$

$$\rho_W = \frac{m_{\text{ges}}}{V_{\text{ges}}} = \frac{m_{\text{Glas}} + m_{\text{W,innen}}}{V_{\text{Glas}} + V_{\text{ges,innen}}} \quad \text{mit } m_{\text{W,innen}} = \rho_{\text{W}} \cdot \left(V_i - V_L(h)\right)$$ 1 BE

$$\rho_W = \frac{m_{\text{Glas}} + \rho_{\text{W}} \cdot \left(V_i - V_L(h)\right)}{\frac{m_{\text{Glas}}}{\rho_{\text{Glas}}} + V_i}$$

$$\rho_W \left(\frac{m_{\text{Glas}}}{\rho_{\text{Glas}}} + V_i\right) = m_{\text{Glas}} + \rho_W \cdot V_i - \rho_W \cdot V_L(h)$$

$$\rho_W \frac{m_{\text{Glas}}}{\rho_{\text{Glas}}} + \rho_W \cdot V_i = m_{\text{Glas}} + \rho_W \cdot V_i - \rho_W \frac{p_0 \cdot V_i}{p_0 + \rho_W \cdot g \cdot h}$$

$$\frac{\rho_W \cdot p_0 \cdot V_i}{p_0 + \rho_W \cdot g \cdot h} = m_{\text{Glas}} \cdot \left(1 - \frac{\rho_W}{\rho_G}\right)$$

$$h = \frac{\rho_W \cdot p_0 \cdot V_i}{g \cdot m_{\text{Glas}} \cdot \rho_W \left(1 - \frac{\rho_W}{\rho_G}\right)} - \frac{p_0}{\rho_W \cdot g} = \frac{p_0}{g}\left(\frac{V_i}{m_{\text{Glas}}\left(1 - \frac{\rho_W}{\rho_G}\right)} - \frac{1}{\rho_W}\right)$$

$$h = \frac{100000\frac{kg}{m \cdot s^2}}{9{,}81\frac{m}{s^2}}\left(\frac{0{,}0001 m^3}{0{,}1 kg\left(1 - \frac{1\frac{g}{cm^3}}{2{,}5\frac{g}{cm^3}}\right)} - \frac{1}{1000\frac{kg}{m^3}}\right) = \underline{6{,}80\text{ m}}$$ 1 BE

h ist die Tiefe der Luft-Wasser-Grenzlinie im Messzylinder in Bezug zur Wasseroberfläche.
Das Volumen des eingedrungenen Wassers ist:

$$V_W = V_0 - V_L(h) = V_0 - \frac{p_0 \cdot V_0}{p_0 + \rho_W \cdot g \cdot h}$$ 2 BE

Da im Zylinder: $\frac{H_W}{H_{ges}} = \frac{V_W}{V_0}$ ist, folgt

$$H_W = 0{,}1m \cdot \left(1 - \frac{100000\,\frac{kg}{m \cdot s^2}}{100000\,\frac{kg}{m \cdot s^2} + 1000\,\frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 6{,}80m}\right) = 4 \text{ cm}$$ 1 BE

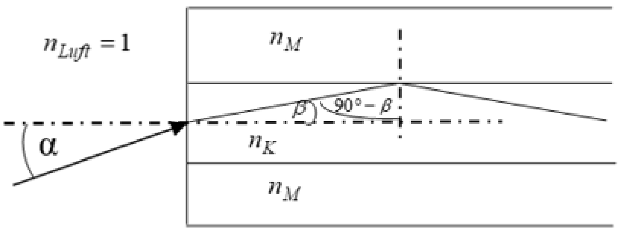
und wegen

$x = h + H_W$ 1 BE
$x = \underline{\underline{6{,}84\,m}}$

Wird *x* richtig errechnet, ohne die Angabe einer Formel, werden 2 BE abgezogen

Lösung 31.3.11.4 „Schnelles Internet“ (10 BE)

a) Für Totalreflexion an den Grenzflächen muss gelten $\frac{\sin(Einfallswinkel)}{\sin(Brechungswinkel)} = \frac{n_M}{n_K}$,
mit Brechungswinkel = 90° folgt $\frac{n_M}{n_K} \leq 1$
Angeben einer sinnvollen Begründung, z.B.: Bei mehradriger Nutzung könnte das Licht in eine andere Ader übergehen.



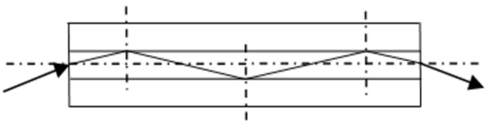
2 BE

b) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_K$

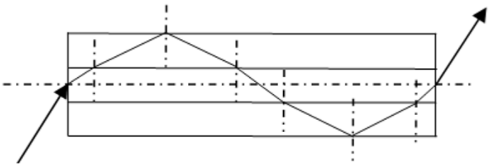
Grenzwinkel der Totalreflexion $\sin(90° - \beta_{\max}) = \frac{n_M}{n_K} \quad \rightarrow \quad 1 - \sin^2\beta_{\max} = \frac{n_M^2}{n_K^2}$ 2BE

$NA = \sin\alpha_{\max} = n_K \cdot \sin\beta_{\max} = n_K \cdot \sqrt{1 - \frac{n_M^2}{n_K^2}} = \sqrt{n_K^2 - n_M^2}$ 2BE

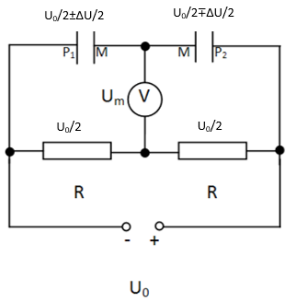
c) Für $\alpha \leq \alpha_{\max}$ verläuft der Strahl im Kern 2BE



Für $\alpha > \alpha_{\max}$ verläuft der Strahl zusätzlich im Mantel, tritt aber außer an der Stirnfläche nicht aus. 2BE



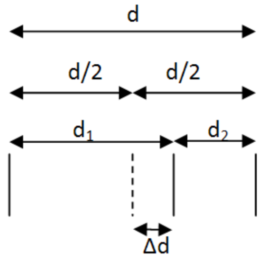
Lösung 31.3.12.1 „Kapazitiver Beschleunigungssensor“ (9 BE)



Durch die angelegte Spannung U_0 werden die Kondensatoren gleich geladen → Ladung Q (Reihenschaltung zweier Kondensatoren).
Die gemessene Spannung U_m ist null, wenn beide Kondensatoren die gleiche Kapazität besitzen. In diesem Fall ist $U_1 = U_2 = U_0/2$. 1 BE

Die Kapazität der Kondensatoren ist nur vom Abstand der Platten abhängig. Wird durch die Beschleunigung die Platte M um die Strecke Δd verschoben, so ändern sich die Kapazitäten:

$d_1 = d/2 + \Delta d$ und $d_2 = d/2 - \Delta d$ 1 BE



Das Messgerät misst die Spannung $U_m = \frac{1}{2} \cdot (U_1 - U_2)$ 1 BE

$$U_m = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{Q}{C_1} - \frac{Q}{C_2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d_1}} - \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d_2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{Q \cdot d_1}{\varepsilon_0 A} - \frac{Q \cdot d_2}{\varepsilon_0 A}\right)$$

$$= \frac{Q \cdot (d_1 - d_2)}{2 \cdot \varepsilon_0 A} = \frac{Q \cdot \left[\frac{d}{2} + \Delta d - \left(\frac{d}{2} - \Delta d\right)\right]}{2 \cdot \varepsilon_0 A}$$

$$U_m = \frac{Q \cdot \Delta d}{\varepsilon_0 A}$$ 3 BE

$$U_m \sim \Delta d$$ 1 BE

Für das Federsystem gilt $F = D \cdot \Delta d$ und $F = m \cdot a \rightarrow a \sim \Delta d \rightarrow U_m \sim a$ 2 BE

Lösung 31.3.12.2 „Stickstoff unter Druck“ (12 BE)

a) Aus dem Durchmesser folgt die Querschnittsfläche $A = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 0{,}007854\ \text{m}^2$. Wenn sich das Volumen von 1 L auf 2 L verdoppelt, muss der Kolben um $\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{\Delta V}{A} = 0{,}1273$ m verschoben werden. Die Feder mit der Federkonstanten k wird um die gleiche Strecke gestaucht. Da $x_1 = 0$ gilt für den Druck dann

$$p(x) = p_1 + \frac{k \cdot x}{A} \qquad (1)$$

bzw. $p_2 = 1{,}5 \cdot 10^5 Pa = 1{,}5 \cdot p_1$. Bei den gegebenen Bedingungen kann Stickstoff als ideales Gas betrachtet werden und so gilt $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$. Daraus folgt $T_2 = T_1 \cdot \frac{p_2 \cdot V_2}{p_1 \cdot V_1} = T_1 \cdot 1{,}5 \cdot 2 = 3 \cdot T_1 = 879$ K

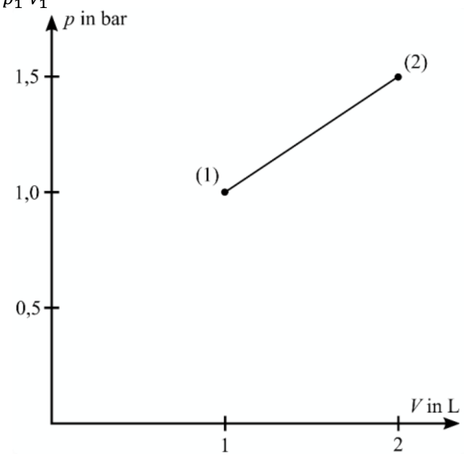
Der Zusammenhang zwischen Volumen V und Kolbenposition x lautet

$$V = V_1 + A \cdot x \qquad (2)$$

Stellt man Gleichung (2) nach x um und setzt das Ergebnis in (1) ein, erhält man den gesuchten Zusammenhang

$$p(V) = p_1 + \frac{k}{A^2} \cdot (V - V_1) = p_1 - \frac{k \cdot V_1}{A^2} + \frac{k}{A^2} \cdot V \qquad (3)$$

Der Druck steigt linear mit dem Volumen und im p-V-Diagramm ergibt sich eine Gerade mit dem Anstieg $\frac{k}{A^2}$.



3 BE

b) Die Volumenarbeit ist definiert als $W_{12} = -\int_{x_1}^{x_2} p(x) \cdot A\,\mathrm{d}x$. Mit Gleichung (1) folgt

$$W_{12} = -\int_0^{x_2} (p_1 \cdot A + k \cdot x)\mathrm{d}x = -\left[p_1 \cdot A \cdot x + \frac{1}{2} k \cdot x^2\right]_0^{x_2}$$

$$W_{12} = -\left(p_1 \cdot A \cdot x_2 + \frac{1}{2} k \cdot x_2^2\right) = -(100\ \text{J} + 25\ \text{J}) = -125\ \text{J}. \qquad (4)$$

Für den Betrag der Arbeit gilt $W_{12} = p_1 \cdot A \cdot x_2 + \frac{1}{2} k \cdot x_2^2$ und mit $x_2 = \frac{V_2 - V_1}{A} = \frac{\Delta V}{A}$ aus Gleichung (2) folgt dann

$W_{12} = p_1 \cdot \Delta V + \frac{1}{2} \frac{k}{A^2} \cdot \Delta V^2$ (5)

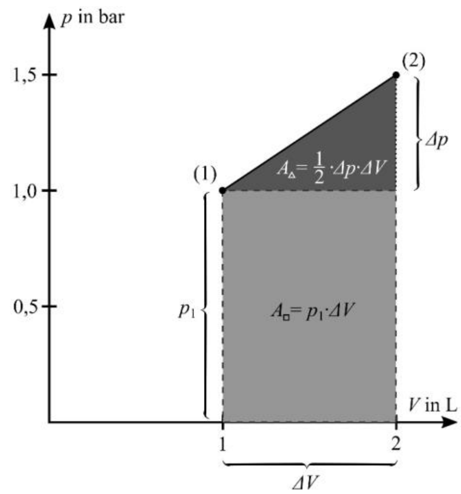
Der erste Summand ist bereits die Fläche $A_{\square}$ des grauen Vierecks in nebenstehender Abbildung. Aus Gleichung (3) folgt

$p_2 = p_1 + \frac{k}{A^2} \Delta V$ bzw. $\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{k}{A^2} \Delta V$ (6)

Damit lässt sich (5) schreiben als

$W_{12} = A_{\square} + \frac{1}{2} \cdot \Delta p \cdot \Delta V = A_{\square} + A_{\Delta}$ (7).

Der Betrag der Arbeit entspricht der Fläche unter der $p(V)$-Kurve.



4 BE

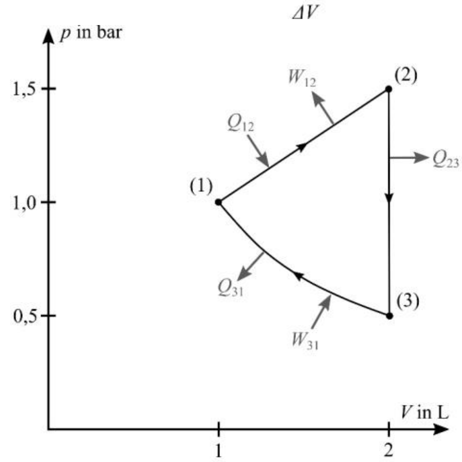
c) Für die isochore Zustandsänderung gilt

$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}$ (8)

und mit $T_3 = T_1$ folgt

$p_3 = p_2 \cdot \frac{T_3}{T_2} = 1{,}5 \cdot p_1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot p_1 = 0{,}5$ bar.

(Die Pfeile für Wärme und Arbeit sind in c) nicht verlangt, werden aber im Aufgabenteil d) benötigt)



2 BE

d) Für den Kreisprozess (1) → (2) → (3) → (1) gilt

$\Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{31} = 0$ (9)

Da die dritte Zustandsänderung isotherm und damit $\Delta U_{31} = 0$ ist, reduziert sich dies auf

$0 = Q_{12} + W_{12} + Q_{23}$ (10)

und für die gesuchte Größe

$Q_{12} = -(W_{12} + Q_{23})$ (11)

Der im Kolben eingeschlossene Stickstoff ($R_S = 297\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$) hat die Masse

$m = \frac{p_1 \cdot V_1}{R_S \cdot T_1} = 0{,}001149$ kg (12)

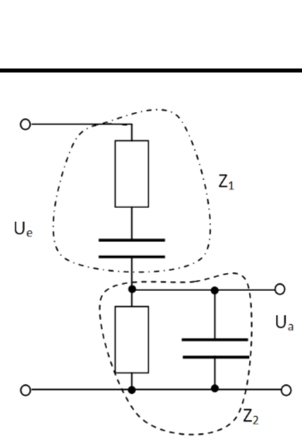
und für die isochore Zustandsänderung ($c_V = 750\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$) gilt

$Q_{23} = c_V \cdot m \cdot (T_1 - T_2) = -505{,}1$ J. (13)

Während der ersten Zustandsänderung muss folglich die Wärme $Q_{12} = -(-125 - 505{,}1\ \mathrm{J}) = 630{,}1$ J zugeführt werden. 3 BE

Lösung 31.2.12.3 „Bandpass“ (10 BE)

Variante 1: Wechselstromwiderstände



$X = X_C$

$Z_1 = \sqrt{R^2 + X^2}$ 1 BE

$$\frac{1}{Z_2} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X^2}} = \sqrt{\frac{R^2 + X^2}{R^2 \cdot X^2}}$$

$$Z_2 = \frac{R \cdot X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$ 1 BE

Stromstärke $I = \frac{U_e}{Z_1 + Z_2} = \frac{U_a}{Z_2}$ 1 BE

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{X \cdot R}{\sqrt{R^2 + X^2}}}{\sqrt{R^2 + X^2} + \frac{X \cdot R}{\sqrt{R^2 + X^2}}},$$ 3 BE

Nenner auf einen Bruchstrich schreiben, weitere Umformung liefert: $\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\frac{R}{X} + \frac{X}{R} + 1}$

$X = \frac{1}{\omega C}$ einsetzen → $\frac{U_\mathrm{a}}{U_\mathrm{e}} = \frac{1}{R\omega C + \frac{1}{R\omega C} + 1}$.

Dieser Ausdruck wird maximal, wenn der Nenner ein Minimum darstellt

→ Minimum berechnen, dazu nach Frequenz *f* ableiten:

$(2\pi RC \cdot f + \frac{1}{2\pi RC \cdot f} + 1)' = 2\pi RC - \frac{1}{2\pi RC f^2}$ 4 BE

Ableitung Null setzen, umstellen nach *f* liefert:

$f = \frac{1}{2\pi RC}$ w.z.b.w.

Variante 2: komplexe Widerstände

$Z_1 = R + X$ 1 BE

$Z_2 = \frac{R \cdot X}{R + X}$ 1 BE

$X = \frac{1}{j\omega C}$ 1 BE

Stromstärke $I = \frac{U_\mathrm{e}}{Z_1 + Z_2} = \frac{U_\mathrm{a}}{Z_2}$

$\frac{U_\mathrm{a}}{U_\mathrm{e}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$

$Z_1 + Z_2 = R + X + \frac{R \cdot X}{R + X}$

$= \frac{3R \cdot X + R^2 + X^2}{R + X}$

$\frac{U_\mathrm{a}}{U_\mathrm{e}} = \frac{\frac{R \cdot X}{R + X}}{\frac{3R \cdot X + R^2 + X^2}{R + X}} = \frac{1}{3 + \frac{R}{X} + \frac{R}{R}}$ 3 BE

einsetzen von $X = \frac{1}{j\omega C}$ liefert:

$\frac{U_\mathrm{a}}{U_\mathrm{e}} = \frac{1}{3 + j(\omega CR - \frac{1}{\omega CR})}$ dieser Ausdruck wird maximal, wenn $\omega CR = \frac{1}{\omega CR}$ 4 BE

→ $f = \frac{1}{2\pi RC}$ w.z.b.w

Lösung 31.3.12.4 „Wie alt ist der Mond?" (9 BE)

a) $^{235}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{231}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$

$^{231}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow{\beta^-} {}^{231}_{91}\mathrm{Pa} + e^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$ 2 BE

b) $N_{\mathrm{U235}}(t) = N_{U,0} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$N_{\mathrm{Pb207}}(t) = N_{U,0} - N_{\mathrm{U235}}(t)$

$\frac{N_{\mathrm{Pb207}}(t)}{N_{\mathrm{U235}}(t)} = \frac{N_{U,0} - N_{\mathrm{U235}}(t)}{N_{U,0} \cdot e^{-\lambda \cdot t}} = \frac{N_{U,0} - N_{U,0} \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{N_{U,0} \cdot e^{-\lambda \cdot t}} = \frac{1}{e^{-\lambda \cdot t}} - 1 = e^{\lambda \cdot t} - 1$

Stellt man dies nach *t* um folgt

$t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(1 + \frac{N_{\mathrm{Pb207}}(t)}{N_{\mathrm{U235}}(t)}\right)$ mit $\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}$ 4 BE

c) Die Halbwertszeit ist $t_{1/2} = 7{,}038 \cdot 10^8\mathrm{a}$. Mit dem gemessenen Verhältnis folgt $t = 4{,}23 \cdot 10^9\mathrm{a}$, etwa 4,2 Milliarden Jahre. 1 BE

d) Das Verhältnis liegt im Intervall zwischen $63{,}5 \cdot (1 - 0{,}0365) = 61{,}2$ und $63{,}5 \cdot (1 + 0{,}0365) = 65{,}8$. Berechnet man mit diesen Werten erneut das Alter, folgen $t_{\mathrm{min}} = 4{,}19 \cdot 10^9\mathrm{a}$ und $t_{\mathrm{max}} = 4{,}27 \cdot 10^9\mathrm{a}$ bzw. $t = (4{,}23 \pm 0{,}4) \cdot 10^8\mathrm{a}$. 2 BE